Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 9

Esercizio 1 Usare i polinomi di Taylor per calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}x^3\left\{\frac{1}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

Esercizio 2 Si calcolino, utilizzando i polinomi di Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{e^{x^2}-e^{x^3}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x+\tan x}.$$

Esercizio 3 Utilizzando il polinomio di Taylor con resto di Lagrange di grado opportuno, si dia una somma di razionali che approssima $\sqrt{e}$ a meno di un errore inferiore a 10^{-3}. Si dica se si tratta di una approssimazione per eccesso o per difetto.

Esercizio 4 Si studi continuità e derivabilità al variare dei parametri reali a e b di

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{per } x<0\\ e^x\,(a\,x+b) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & \text{per } |x|>1\\ a\,x^2+b & \text{per } |x|\leq 1\end{cases}$$

Esercizio 5 Si calcolini usando i polinomi di Taylor i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x-\log\cos x)\log(1+\sin x)}{x\sin x\sin 2x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)\arctan x-x\sin x}{\arctan x-1-\log(1+x)+\cos x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5e^{x^3}-\log(1+x^5)}{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)^2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\cos x^2}{x^2\sin x-x\tan x^2}$$

Esercizio 6 Sia f una qualsiasi funzione definita in un intervallo aperto I. Si assuma che per ogni $x_0\in I$, $f(x)-f(x_0)$ sia un infinitesimo superiore a $x-x_0$ per $x\to x_0$. Si deduca la forma della funzione.

Esercizio 7 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine n in x_0 delle seguenti funzioni

i. $f(x)=x-\sin x,\quad x_0=0,\ n=5,$

ii. $f(x)=e^{x-1}-\cos(2\,\pi\,x),\quad x_0=1,\ n=4,$

iii. $f(x)=x\ \arctan x,\quad x_0=0,\ n=2,$

iv. $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=2,\ n=2,$

v. $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=0,\ n=3,$

vi. $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=2,\ n=3$

vii. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=1,\ n=3,$

viii. $f(x)=x^4+x-2,\quad x_0=1,\ n=4$

Esercizio 8 Determinare se f la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x<4\\ 5x-16 & x\geq 4\end{cases}$$

è due volte derivabile e se è convessa.

Esercizio 9 Sia f una funzione convessa in un intervallo I.

1. Dimostrare che se ha due punti di minimo in I allora esiste un intervallo dove f è costante.
2. Dimostrare che se ha massimo in I allora è assunto agli estremi del dominio.

Esercizio 10 Sia $E = \{-2,-1,0,1,2\}$ e sia

$$f(x) = \sup_{a\in E} 2ax - a^2.$$

1. Dimostrare che f è convessa.
2. Dimostrare che f è limitata inferiormente
3. Sia $g(x) = \sup\limits_{a\in F} 2ax - a^2$ dove $F = [-10,10]\cap\mathbb{N}$, dimostrare che g è convessa.

Esercizio 11 Ricordiamo che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni x_0, $x_1\in\mathbb{R}$ e per ogni $\lambda\in(0,1)$ si ha $f(x_0+\lambda(x_1-x_0)) \le f(x_0)+\lambda(f(x_1)-f(x_0))$, e che f si dice strettamente convessa se l'uguaglianza in tale disuguaglianza non è mai verificata. Sia ora $f\in C^2(\mathbb{R})$ una funzione convessa. Allora:

1. Se f è strettamente convessa, allora $f''(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. V F
2. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$, allora $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. V F
3. Se f è strettamente convessa e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$, allora $f'(5)<0$. V F
4. Se f, $-f$ e $-|f|$ sono convesse, allora f è una funzione costante. V F

Esercizio 12 Sia $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto di minimo locale. Allora:

1. Se $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, allora $f'''(x_0)=0$. V F
2. Se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x-x_0)+a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0$, allora $a\le 0$. V F
3. Il polinomio di Taylor di grado 13 associato a f e centrato in x_0 ha un minimo globale in x_0. V F
4. $f^{(13)}(x_0)=0$. V F

Esercizio 13 Sia $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f(0)=0$ e $f^{(2n)}(0)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Allora:

1. Se $f^{(5)}(0)\neq 0$, allora $\exists\,\varepsilon>0:\ f(\varepsilon)f(-\varepsilon)<0$. V F
2. Se $f'(0)=1$, allora $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. V F
3. Se anche $f^{(2n+1)}(0)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora esiste un intorno di 0 in cui f è nulla. V F
4. Posto $g(x) := (f(x))^2$, si ha che $g^{(2n+1)}(0)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e per ogni $x\in\mathbb{R}$. V F